EASE
Cursos Preparatórios

90% dos alunos do Ease aprovados na ESPM em 2010.

RESOLUÇÃO COMENTADA

13/nov./2011

MATEMÁTICA

1. **ESPM**

Retirando-se o maior número do conjunto $\{12; 7; 9; 4; x; 5\}$, a média aritmética dos seus elementos diminui 1 unidade. O produto dos valores de x pode assumir é igual a:

a) 58
b) 62
c) 67
d) 75
e) 79

✎ RESOLUÇÃO:

Existem duas possibilidades:

1° O número 12 ser o maior.

$$\frac{7+9+4+x+5}{5} = \frac{12+7+9+4+x+5}{6} - 1$$

$$\therefore \boxed{x = 5}$$

2° O x sendo o maior número

$$\frac{7+9+4+12+5}{5} = \frac{x+12+9+7+5+4}{6} - 1$$

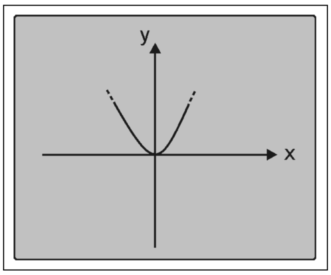
$$\therefore \boxed{x = \frac{67}{5}}$$

O produto dos possíveis valores é $\cancel{5} . \frac{67}{\cancel{5}} = 67$

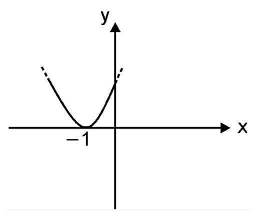
Alternativa c

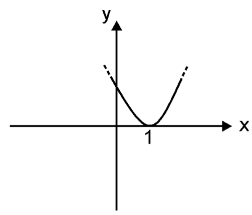
2. **ESPM**

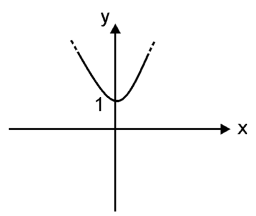
A figura em destaque representa o gráfico da função $y = f(x)$.

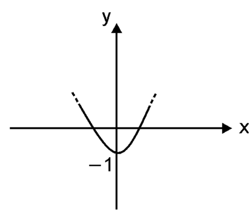


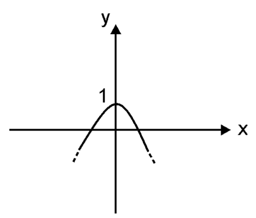
Assinale a alternativa que melhor se aproxima do gráfico da função $y = f(x-1)$

a)


b)


c)


d)


e)


✎ RESOLUÇÃO:

Comparando as situações

$$y = f(x)$$

para $x = 0$ $f(x) = 0$

Entretanto, quando

$$y = f(x-1)$$

para $x = 1$ $f(0) = 0$

Portanto, o gráfico $y = f(x-1)$ fica deslocado uma unidade para a direita em relação a $y = f(x)$.

Alternativa b

3. ESPM

Adriane e **Ariadne** são permutações de um mesmo nome. A quantidade de inversões de letras que ocorreram de um nome para o outro é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

✎ RESOLUÇÃO:

Permutar	A	d	r	i	a	n	e
para	A	r	i	a	d	n	e

Estão fixas as letras n, e, A

1º devemos trocar o d por e.
2º no sequência o d por i.
3º por último o d por a.

Sendo necessárias 3 trocas.

Alternativa b

4. ESPM

Para $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\dfrac{(x^2-1)!.x!}{(x^2-2)!.(x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x-2$
b) $(x-2)!$
c) $(x-1)!$
d) x
e) $x-1$

✎ RESOLUÇÃO:

Devemos abrir os maiores fatoriais até os menores e simplificamos.

$$\frac{(x^2-1)!.x!}{(x^2-2)!.(x+1)!} = \frac{(x^2-1).\cancel{(x^2-2)!}.\cancel{x!}}{\cancel{(x^2-2)!}.(x+1).\cancel{x!}} = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1).\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x-1$$

Alternativa e

5. ESPM

Considere a operação $\phi(n)$ que consiste em tomar um número **n** que está no visor de uma calculadora, somá-lo com 12 e dividir o resultado por 5, aparecendo um novo número no divisor. Após certo número de vezes que essa operação é repetida, nota-se que o número que aparece no visor não mais se altera, isto é, $\phi(n) = n$. Esse número é:

a) 3
b) 2
c) 5
d) 7
e) 1

✎ RESOLUÇÃO:

De acordo com o enunciado concluímos:

$$n = \frac{n+12}{5}$$

$$\therefore \boxed{n = 3}$$

Alternativa a

6. ESPM

A rotação de um ponto $P(x, y)$ do plano cartesiano em torno da origem é um outro ponto $P'(x', y')$, obtido pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Onde α é o ângulo de rotação, no sentido anti-horário. Desse modo, se $P = (\sqrt{3}, 1)$ e $\alpha = 60°$, as coordenadas de P' serão:

a) $(-1, 2)$
b) $(-1, \sqrt{3})$
c) $(0, \sqrt{3})$
d) $(0, 2)$
e) $(1, 2)$

✎ RESOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Realizando o produto das matrizes temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.\cos\alpha & -y.\operatorname{sen}\alpha \\ x.\operatorname{sen}\alpha & y.\cos\alpha \end{bmatrix}$$

✎ RESOLUÇÃO (CONTINUAÇÃO):

Tendo $P = (\sqrt{3}, 1) = (x, y)$ e $\alpha = 60°$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}.\cos 60° & -1.\mathrm{sen}\, 60° \\ \sqrt{3}.\mathrm{sen}\, 60° & 1.\cos 60° \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}.(1/2) & -1.(\sqrt{3}/2) \\ \sqrt{3}.(\sqrt{3}/2) & 1.(1/2) \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

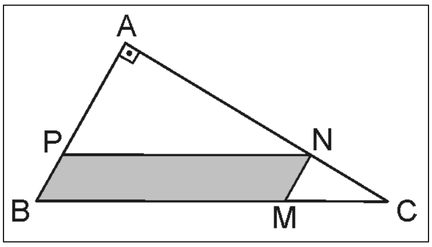
$$y' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore \boxed{P'(0, 2)}$$

Alternativa d

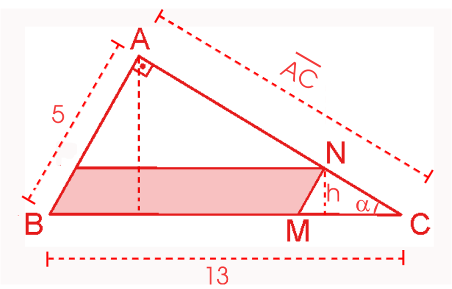
7. **ESPM**

A figura abaixo mostra o paralelogramo $BMNP$ inscrito no triângulo retângulo ABC, em que $AB = 5\ cm$ e $BC = 13\ cm$. Sabe-se que o paralelogramo tem área máxima quando M é ponto médio de BC.
Então, a maior área que o paralelogramo pode ter é igual a:



a) $12\ cm^2$
b) $18\ cm^2$
c) $15\ cm^2$
d) $7,5\ cm^2$
e) $9\ cm^2$

✎ RESOLUÇÃO:



✎ RESOLUÇÃO (CONTINUAÇÃO):

Aplicando pitágoras temos:

$$13^2 = 5^2 + (AC)^2 \qquad \overline{AC} = 12$$

1° Sendo M ponto médio de BC

2° Os ΔABC e ΔNMC são semelhantes, temos:

$$\frac{BC}{MC} = \frac{AB}{NM} = \frac{H}{h}$$

$$\frac{13}{(13/2} = \frac{H}{h}$$

$$\therefore \boxed{h = \frac{H}{2}}$$

3° Aplicando a relação métrica:

$$(hip).(Alt.) = (cat).(cat)$$

$$13.H = 5.12$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{60}{13} \text{ logo } h = \frac{30}{13}}$$

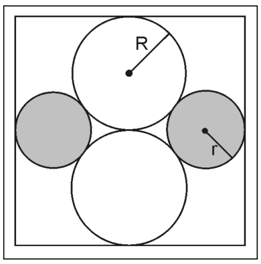
A área do paralelogramo é $\frac{13}{2}.\frac{30}{2} = 15\ cm$.

Alternativa c

8. **ESPM**

A figura abaixo mostra um quadrado, dois círculos claros de raios **R** e dois círculos escuros de raios **r**, tangentes entre si e aos lados do quadrado.

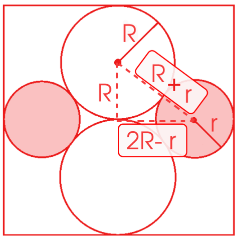
A razão entre **R** e **r** é igual a:



a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $3/2$
d) 2
e) $\sqrt{5}/2$

✎ RESOLUÇÃO:

O quadrado possui lado $4R$



Aplicando pitágoras temos:

$$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2$$

$$\cancel{R^2} + 2.R.r + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} + 4.R^2 - 4R.r + \cancel{r^2}$$

$$4R^2 - 6.R.r = 0$$

$$R.(4R - 6r) = 0$$

$$4R - 6r = 0$$

$$\frac{R}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Alternativa c

9. **ESPM**

A sequência $(x, 4, y, z)$ é uma progressão geométrica e $(x, y, z - 2)$ é uma progressão aritmética, com $y < 0$.

O valor de z é:

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) 16
d) 8
e) $4.\sqrt{2}$

✎ RESOLUÇÃO:

Sendo P.G.:

$$(x, 4, y, z) = (\frac{4}{q}, 4, 4q, 4q^2)$$

Sendo P.A.:

$$(x, y, z - 2) = (\frac{4}{q}, 4q, 4q^2 - 2)$$

✎ RESOLUÇÃO (CONTINUAÇÃO):

Utilizando-se a média aritmética temos:

$$4q = \frac{\frac{4}{q} + 4q^2 - 2}{2}$$

$$8q = \frac{4}{q} + 4q^2 - 2$$

$$8q^2 = 4 + 4q^3 - 2q$$

$$4q^3 - 8q^2 - 2q + 4 = 0$$

$$4q^2(q - 2) - 2(q - 2) = 0$$

$$(q - 2)(4q^2 - 2) = 0$$

$$q = 2;\ q = \frac{\sqrt{2}}{2};\ q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $y < 0$ a razão é negativa.

Alternativa a

10. **ESPM**

Ligando as cidades A e B existem somente 2 estradas distintas que não se cruzam e nem se ligam de maneira alguma. Uma dessas esradas atravessa uma ponte de madeira e a outra atravessa 2 pontes sucessivas, também de madeira. Acontece que a região foi acometida por grandes enchentes e a probabilidade de cada uma dessas pontes estar em condições de travessia é de 50%. Se um viajante deseja ir de carro de A até B nessa época de enchentes, a probabilidade de ele conseguir o seu intento é de:

a) 52%
b) $54,5\%$
c) $57,5\%$
d) 60%
e) $62,5\%$

✎ RESOLUÇÃO:

Analisando as duas possibilidades

1° Sucesso do primeiro caminho:

$$50\%$$

2° Fracasso do primeiro e sucesso no segundo:

$$50\%.25\% = 12,5\%$$

A soma das probabilidades:

$$50\% + 12,5\% = 62,5\%$$

Alternativa e

11. ESPM

Apenas 40% dos hóspedes de um hotel de São Paulo são estrangeiros, sendo que 70% deles são ingleses e os demais, franceses. Sabe-se que 25% dos franceses e 50% dos ingleses falam Português.

Escolhendo-se, ao acaso, um dos hóspedes desse hotel, a probabilidade de que ele fale Português é:

a) 65%
b) 72%
c) 68%
d) 77%
e) 82%

✎ RESOLUÇÃO:

Separando a informação do enunciado temos:

Brasileiro: 60%

$$\text{Estrangeiro: } 40\% \begin{cases} 30\% \text{ franceses: } 12\% \begin{cases} \dfrac{25\% \text{ falam português}}{3\% \text{ do total}} \end{cases} \\ \\ 70\% \text{ ingleses: } 28\% \begin{cases} \dfrac{50\% \text{ falam português}}{14\% \text{ do total}} \end{cases} \end{cases}$$

A probabilidade de escolher ao acaso algum hóspede que fale português é:

$$P = 60\% + 3\% + 14\% = 77\%$$

Alternativa d

12. ESPM

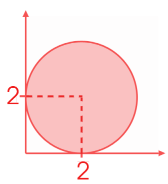
Seja C a região do plano cartesiano definida pela desigualdade $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$ e seja P a região definida por $x \geq 2$ ou $y \geq 2$. A área da região intersecção entre C e P é:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

✎ RESOLUÇÃO:
Dada a desigualdade que representa a região C temos:

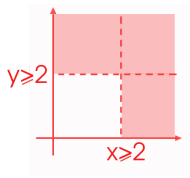
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

Centro $(2, 2)$ e raio: 2

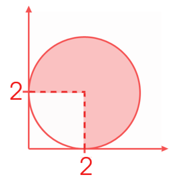


✎ RESOLUÇÃO (CONTINUAÇÃO):

Dados as desigualdades $x \geq 2$ ou $y \geq 2$ temos:



Realizando a intersecção das duas regiões surge:



A área hachurada é $\dfrac{3}{4}\pi . R^2 = \dfrac{3}{\cancel{4}}\pi . \cancel{2^2} = 3\pi$

Alternativa c

13. ESPM

Sendo **x** e **y** números reais e $(3x+2y)^2 + (x-2y+8)^2 = 0$, o valor de y^x é:

a) $1/9$
b) $1/8$
c) -8
d) 9
e) 8

✎ RESOLUÇÃO:

Sendo o resultado e os termos das parcelas positivos (pois estão elevados ao quadrado), resta-nos apenas a possibilidade de cada termo ser igualado a zero. Portanto:

$$3x + 2y = 0$$

$$(x - 2y + 8) = 0$$

Da resolução do sistema temos:

$$\boxed{x = -2} \text{ e } \boxed{y = 3}$$

Assim:

$$y^x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

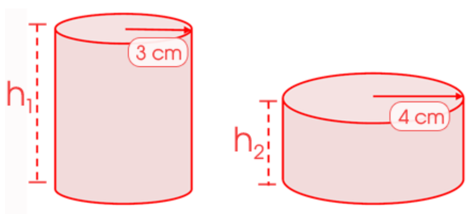
Alternativa a

14. **ESPM**

Dois copos cilindricos têm o mesmo volume. Seus diâmetros internos medem $6\ cm$ e $8\ cm$, respectivamente. Se a soma das suas alturas é igual a $24\ cm$, a diferença entre elas é de:

a) $5,34\ cm$
b) $8,12\ cm$
c) $5,78\ cm$
d) $7,66\ cm$
e) $6,72\ cm$

✎ RESOLUÇÃO:



$$V_1 = V_2$$

logo, temos:

$$\cancel{\pi}.3^2.h_1 = \cancel{\pi}.4^2.h_2$$

$$9.h_1 = 16.h_2$$

$$\boxed{h_1 = \frac{16}{9}h_2}$$

Do enunciado extraímos ainda que:

$$h_1 + h_2 = 24$$

Resolvendo o sistema temos:

$$\frac{16}{9}.h_2 + h_2 = 24$$

$$\boxed{h_1 = 8,64 \text{ e } h_2 = 15,36}$$

A diferença de $h_1 - h_2$ é:

$$15,36 - 8,64 = 6,72\ cm$$

Alternativa e

15. **ESPM**

Carlinhos possui certa quantidade de bolinhas de gude e algumas latinhas onde guardá-las. Ao colocar 4 bolinhas em cada lata, sobraram 2 bolinhas; mas, quando colocou 5 bolinhas em cada lata, a última ficou com apenas 2 bolinhas. Podemos afirmar que todas as latas ficariam com o mesmo número de bolinhas se ele tivesse:

a) 36 bolinhas
b) 42 bolinhas
c) 49 bolinhas
d) 55 bolinhas
e) 63 bolinhas

✎ RESOLUÇÃO:

$x \Rightarrow$ representa a quantidade de bolinhas

$y \Rightarrow$ representa a quantidade de latinhas

A partir do enunciado temos:

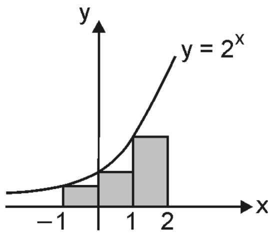
$$\begin{cases} x = 4y + 2 \\ x = 5y - 3 \end{cases} \qquad \boxed{x = 22} \text{ e } \boxed{y = 5}$$

Sendo 5 o número de latas. O número de bolinhas deve ser múltiplo de 5. Portanto, 55 bolinhas analisando o enunciado.

Alternativa d

16. **ESPM**

A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x) = 2^x$. A área da região sombreada, formada por retângulos, é igual a:



a) $3,0$
b) $3,5$
c) $4,0$
d) $4,5$
e) $5,0$

✎ RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} f(x) = 2^x \\ f(-1) = 2^{-1} \\ f(0) = 2^0 = 1 \\ f(1) = 2^1 = 2 \end{cases}$$

A área do primeiro retângulo é:
$$A_1 = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A área do segundo retângulo é:
$$A_1 = 1.1 = 1$$

A área do terceiro retângulo é:
$$A_1 = 1.2 = 2$$

A soma das áreas da questão:

$$\frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2} = 3,5$$

Alternativa b

17. ESPM

O domínio da função real $f(x) = log_x(x^2 - 4x + 3)$ é dado por:

a) $]-\infty, \ 1[\ \cup \ ]3, +\infty[$
b) $]-\infty, \ 0[\ \cup \ ]3, +\infty[$
c) $]-\infty, -1[\ \cup \ ]3, +\infty[$
d) $]0, 1[\ \cup \ ]3, +\infty[$
e) $]1, 3[$

✎ RESOLUÇÃO:

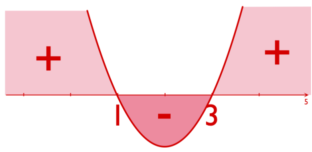
Através da condição de existência dos logaritmos temos:

$$f(x) = log_x(x^2 - 4x + 3)$$

1°

$$x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$



2°

$$x < 1 \text{ ou } x > 3$$

A intersecção das duas condições de existência

$$0 < x < 1 \text{ ou } x > 3$$

Alternativa d

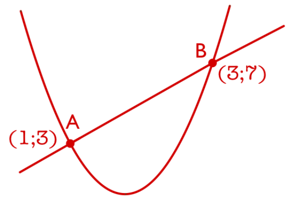
18. ESPM

A parábola de equação $y = x^2 - x + 1$ intercepta a reta de equação $y = x + 4$ nos pontos A e B. O comprimento do segmento AB é igual a:

a) $4\sqrt{2}$
b) 5
c) $5\sqrt{2}$
d) 4
e) $3\sqrt{2}$

✎ RESOLUÇÃO:

A intersecção é obtido através do sistema de equações:



$$\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

Obtemos:

$$x = -1 \quad y = 3$$

ou

$$x = 3 \quad y = 7$$

Aplicando a distância entre ponto temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4.\sqrt{2}$$

Alternativa a

19. ESPM

A figura abaixo mostra uma série de painéis formados por uma faixa de ladrilhos claros envoltos em uma moldura de ladrilhos escuros.

Num desses painéis, o número de ladrilhos escuros excede o número de ladrilhos claros em 50 unidades. A quantidade total de ladrilhos desse painel é igual a:

a) 126
b) 172
c) 156
d) 224
e) 138

✎ RESOLUÇÃO:

Ladrilhos claros

$(1, 2, 3, 4)$ formam uma P.A. de razão 1 e $a_1 = 1$

Portanto: $a_N = 1 + (N - 1).1 = \boxed{a_N = N}$

Ladrilhos escuros

$(8, 10, 12 \ldots)$ formam uma P.A. de razão 2 e $a_1 = 8$

Portanto: $a_N = 8 + (N - 1).2 = \boxed{2N+6}$

A partir do enunciado temos:

$$2N + 6 = N + 50$$

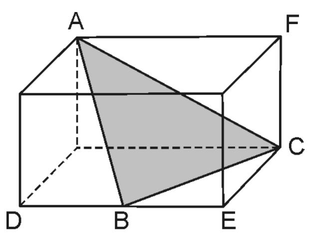
$$\boxed{N = 44}$$

Para 44 ladrilhos brancos. Temos 94 ladrilhos escuros. Portanto, o total é de 138.

Alternativa e

20. **ESPM**

A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo de medidas $AF = 4$, $FC = 3$ e $CE = 2\sqrt{3}$, sendo B o ponto médio de $\overline{DE}$.
O perímetro do triângulo ABC é igual a:



a) 12
b) 14
c) 13
d) 15
e) 11

✎ RESOLUÇÃO:

No Δ_{DGB} $(BG)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4$
No Δ_{AGB} $(AB)^2 = (4)^2 + (3)^2 = 5$
No Δ_{AFC} $(AC)^2 = 4^2 + 3^2 = 5$
No Δ_{BEC} $(BC)^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4$

O perímetro do triângulo ABC é $5 + 5 + 4 = 14$

Alternativa b